

# Capítulo 5 Material Bônus

## — Introdução —

Você é alguém que gostaria que houvesse mais exemplos, discussões e comentários nas descrições intencionalmente breves das aulas? Se sim, você veio ao lugar certo! Este arquivo contém material bônus para algumas das atividades do capítulo 5.

Para quebra-cabeças, muitos exemplos de quebra-cabeças resolvidos são fornecidos, junto com os comentários adicionais, sobre como criá-los. O programa Early Family Math é baseado na ideia de que a matemática inicial é algo que uma família deve fazer em conjunto, e criar quebra-cabeças para seu filho fazer junto com você é uma parte importante desse processo. Depois de pegar o jeito de cada quebra-cabeça, você descobrirá que a maioria, senão todos os quebra-cabeças, são bastante fáceis de criar.

Muitos desses quebra-cabeças têm diferentes níveis de dificuldade, e há muitas sugestões e exemplos nas próximas páginas sobre como criar esses níveis. Sempre comece com os quebra-cabeças mais fáceis. É muito melhor que seu filho tenha sucesso, compreensão e diversão com quebra-cabeças um pouco “fáceis demais” do que ficar frustrado, desanimado e excessivamente desafiado por quebra-cabeças difíceis. Depois que seu filho adquirir confiança e entusiasmo para uma atividade matemática, é hora de aos poucos incorporar desafios maiores. Além disso, nem todos os quebra-cabeças serão divertidos para todas as pessoas, então não force os quebra-cabeças e as atividades que parecem não se encaixar.

Isso é o que você vai encontrar nas próximas páginas:

- **Capítulo 5 – Nim com Fatores**
- **Capítulo 5 – Crivo de Eratóstenes**
- **Capítulo 5 – Alavancas e Móviles**
- **Capítulo 5 – Divida a Caixa**
- **Capítulo 5 – Quebra-Cabeça de Substituição de Letras**
- **Capítulo 5 – Investigações - Brincando com Formas**
- **Capítulo 5 – Jogo do Produto**
- **Capítulo 5 – Calculadoras Limitadas**
- **Capítulo 5 – Dobro ou Nada**

---

## — Questões legais —

Toda família deve ter a oportunidade de aprender e desfrutar a matemática juntos. Para esse fim, Early Family Math é uma coleção de materiais que famílias e educadores podem editar, traduzir, copiar e distribuir livremente, sem pedir permissão, apenas para uso não comercial. © Copyright Early Family Math - 2025 v. 1.1 Creative Commons: Licença Internacional Atribuição-Não Comercial 4.0

# Capítulo 5 – Nim com Fatores

## — Introdução —

Comece com qualquer número, por exemplo 20. Deixe a criança escolher se quer ir primeiro ou depois. Em seu turno, um jogador poderá subtrair qualquer divisor do número atual do número. O jogador que chegar a 0 primeiro perde.

## — Análise —

Como sempre, uma boa estratégia para aprender sobre esse jogo é observar uma versão mais simples do jogo, que nesse caso significa começar com números bem pequenos. Se é a sua vez e você ver algum desses números, isso que irá acontecer : 1 - perde, 2 - ganha, 3 - perde, 4 - ganha, 5 - perde, 6 - ganha, 7 - perde, e 8 - ganha. Nesse momento o padrão está claro - se é a sua vez e você tem um número ímpar, você perde; se você tem um número par, você ganha.

Encontrar a estratégia para vencer é importante, mas vamos nos aprofundar mais nisso. Por que isso funciona? Quais são as propriedades dos números ímpares e pares que criam essa situação? Faça essa pergunta para o seu filho e dê a ele bastante tempo para pensar sobre o assunto e fazer experimentos - não há pressa, afinal esse processo de raciocinar sobre a pergunta é extremamente valioso e não pode ser apressado.

Alguns experimentos com números pequenos rapidamente revelam o que está acontecendo. Se você tem um número ímpar, todos os divisores são ímpares, então quando você subtrai qualquer divisor o resultado é um número par. Consequentemente, um número ímpar em um turno sempre leva a um número par no próximo turno. Números pares sempre possuem ambos números ímpares e pares como divisores. Portanto, a situação não é exatamente igual. No entanto, se você tem um número par, seu objetivo é dar um número ímpar para o oponente, e há um jeito fácil de fazer isso - selecione o divisor 1 e subtraia!



3) Nesse crivo, qual foi o último número primo que possui um novo X útil na sua fileira?

Nesse crivo, os números primos com X úteis são 2, 3, e 5. Os múltiplos de 7 e 11 já possuíam outros X. Se você observar a resposta da última questão, você verá a resposta aqui. A única maneira de obter novos Xs é multiplicar um número primo por números primos maiores ou iguais a ele mesmo. Uma vez que chegamos a um primo como o 7 onde  $7 \times 7 > 25$ , nós não precisamos conferir ele. Então, nós apenas precisamos conferir os primos que o quadrado é menor ou igual ao último número.

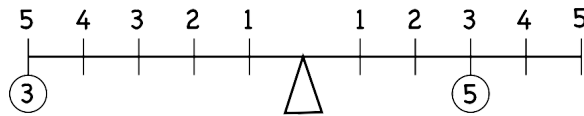
4) Se te dessem um número, 53 por exemplo, quais números primos você precisa dividir ele para descobrir se ele é primo?

Segunda a resposta da última pergunta, nós apenas precisamos checar os números primos que o quadrado é menor ou igual a 53. Esses números primos são 2, 3, 5, e 7 – nenhum desses divide 53 igualmente, então 53 deve ser um número primo!

# Capítulo 5 – Alavanca e Móviles

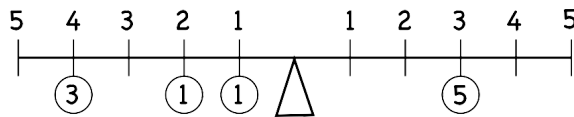
## — Alavancas —

O princípio da alavanca afirma que a força exercida em um lado da alavanca por uma massa é igual à multiplicação da massa vezes a distância do ponto de pivô, o ponto de apoio.



Na alavanca acima, o 3 no lado esquerdo está a uma distância de 5 do ponto de apoio, então a força é  $3 \times 5 = 15$ . O 5 no lado direito está a uma distância de 3 em relação ao ponto de apoio, então a sua força é  $5 \times 3 = 15$ . Essa alavanca está em equilíbrio.

Se houver mais de um peso em um lado, as forças irão se somar.



Nessa alavanca, há  $3 \times 5 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 15$  no lado esquerdo, e  $5 \times 3 = 15$  no lado direito. Então está em equilíbrio.

Nós iremos limitar esses problemas a apenas números inteiros. Você pode decidir se permitirá ou não ter mais de um peso pendurado no mesmo ponto – assumiremos que é aceitável o uso de múltiplos pesos na discussão a seguir.

## — Quebra-Cabeças de Alavancas —

Você tem um peso de 3-unidades e um de 5-unidades para colocar em lados opostos do ponto de apoio. Onde eles devem ser postos para que eles fiquem equilibrados? A resposta para isso é colocá-los nas distâncias 5 e 3, mas também pode ser no 10 e no 6, ou em números até maiores como 15 e 9. Mantenha-se receptivo a discutir qualquer ideia que seu filho apresentar.

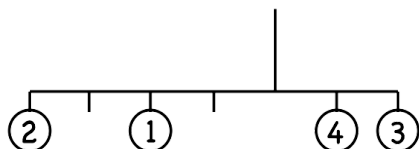
Se você tem um peso de 3-unidades e um peso de 5-unidades para colocar em um lado de uma alavanca, quais pesos você pode colocar a quais distâncias no outro lado? Essa pergunta é uma continuação da página Contando Pra Valer ao final do Capítulo 4. Como antes, explore diferentes combinações de pesos. O que acontece se o 3 e 5 forem substituídos por 4 e 5, 4 e 9, ou 6 e 9?

Como esse problema muda se nós colocarmos o peso de 3-unidades e 5-unidades em lados opostos do ponto de apoio? Agora é fácil pesar um peso de 1-unidade usando  $3 \times 2 = 5 \times 1 + 1 \times 1$ . Quais outros pesos você consegue pesar dessa forma?

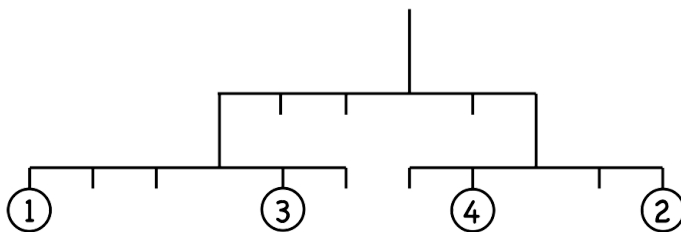
## — Móviles —

Você recebe alguns pesos e um projeto para um móbile que possui alguns pontos de fixação. O desafio é colocar no máximo um peso por ponto para que o móbile encontre o equilíbrio ao longo de todos os braços. Para todos esses problemas, nós iremos assumir que as linhas que compõem o móbile não possuem peso. Cada braço do móbile é uma alavanca que precisa ser equilibrada, por isso esses quebra-cabeças são uma extensão do Equilíbrio da Alavanca - pratique aqueles quebra-cabeças antes de começar esses.

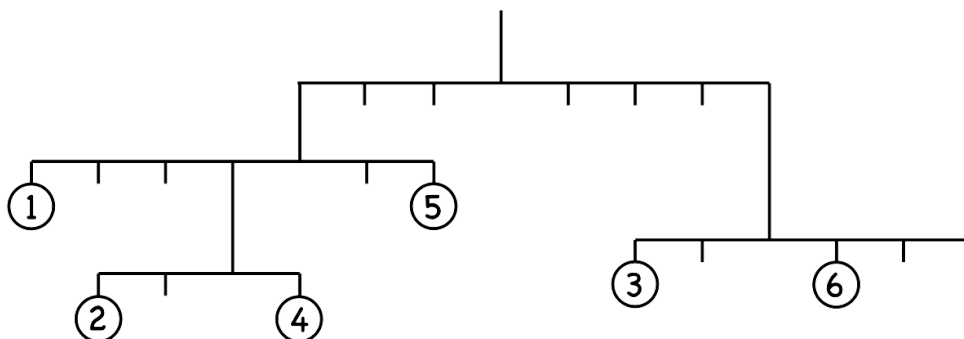
Comece com os móveis mais simples, que são apenas alavancas no ar. Aqui está a solução para colocar os pesos de 1 a 4 nesse móbile para equilibrá-lo. Isto funciona como uma alavanca com o ponto de apoio no ponto de suspensão. Nesse móbile temos  $2 \times 4 + 1 \times 2 = 4 \times 1 + 3 \times 2$ .



Se houver mais de um nível no móbile, então cada braço individual em cada nível deve equilibrar-se como uma alavanca. Para esse próximo móbile, os dois braços de baixo estão em equilíbrio pois  $1 \times 3 = 3 \times 1$  e  $4 \times 1 = 2 \times 2$ . Para o próximo nível, você só precisa adicionar os pesos abaixo dele. Por exemplo, o peso no lado esquerdo é  $1 + 3 = 4$  – no próximo nível acima, não importa onde no braço inferior os pesos estão localizados. Então, para o próximo nível,  $(1 + 3) \times 3 = (4 + 2) \times 2 = 12$ , dessa forma o topo também está em equilíbrio.



Divirtam-se fazendo quebra-cabeças de móveis uns para os outros. Aqui está um último quebra-cabeça para brincar usando cada um dos números de 1 a 6. Não se preocupe em complicar desnecessariamente e em usar cada número apenas uma vez. Qualquer quebra-cabeça solucionado será divertido. Conferindo os níveis temos:  $2 \times 2 = 4 \times 1$ ;  $1 \times 4 + (2 + 4) \times 1 = 5 \times 2$ ;  $3 \times 2 = 6 \times 1$ ; e  $(1 + 2 + 4 + 5) \times 3 = (3 + 6) \times 4$ .



# Capítulo 5 – Divida a Caixa

## — Introdução —

Um retângulo, 4 por 4 ou maior, com números em alguns de seus quadrados, será dividido em retângulos menores. Cada número deve estar contido em um retângulo separado cuja área corresponda àquele número.

Para adultos, construir esses quebra-cabeças é simples. Pegue um retângulo, divida seu interior em retângulos, insira os números correspondentes às áreas dentro de cada retângulo interior e, em seguida, remova qualquer vestígio dos retângulos interiores. A única parte complicada é colocar os números em locais que deixem o quebra-cabeça relativamente fácil de resolver - e você sempre pode dar dicas conforme for necessário caso o quebra-cabeça acabe sendo muito difícil.

## — Estratégias Para Resolução —

Aqui estão algumas estratégias gerais que podem simplificar a resolução desses quebra-cabeças. Faça o seu melhor para deixar o seu filho descobrir essas regras enquanto brinca com os quebra-cabeças. Façam uma lista juntos das regras que ele pensar.

			3
	4	3	
	2		
4			

			3
	4	3	
	2		
4			

			3
	4	3	
	2		
4			

1) Olhe para os números com apenas uma ou duas opções para seus retângulos.

Ambos os 4s são altamente restritos. Cada 4 pode apenas estar dentro de um retângulo 1 por 4 ou 2 por 2. O 4 de cima está cercado, então ele não pode estar dentro de um 1 por 4. Dessa forma, deve haver um retângulo 2 por 2 no canto superior esquerdo. Isso faz com que a única possibilidade do 4 de baixo seja um retângulo de 1 por 4 e que fique ao longo da parte de baixo.

2) Observe os números primos - eles devem estar em um retângulo 1 por n.

Os 3s no quebra-cabeça acima devem estar em um retângulo 1 por 3. O 3 no canto superior direito só pode fazer parte de um retângulo de 1 por 3 que se estende pela borda superior ou pelo lado direito. No canto superior esquerdo há um quadrado 2 por 2 para o 4 tornando impossível ter o 1 por 3 ao longo da borda de cima.

O 1 por 4 posicionado na base força o 1 por 3 referente ao 3 que está mais abaixo a ocupar a mais alta das duas posições verticais possíveis.

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

		3	6	2	
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

		3	6	2	
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

3) Números perto da dimensão máxima geralmente tem menos opções.

Observe os números 6 e 5 nesse próximo quebra-cabeça. O 6 no topo precisa de muito espaço, e a única forma dele ter espaço suficiente é estando na vertical para baixo, usando a coluna inteira. O outro 6 não pode ser 1 x 6 porque a linha foi cortada pela coluna do outro 6. Então, o 6 de baixo deve ser 2 x 3, que ainda não está exatamente determinado.

Outro exemplo, se houvesse um 8 nesse quebra-cabeça, 1 por 8 não iria caber, então ele seria parte de um retângulo 2 por 4.

4) Quadrados que estão engavetados possuem menos opções.

O primeiro 5 está engavetado, então sua única saída é estar em uma coluna de 5. O outro 5, porque também é primo, deve ficar na vertical ou horizontal. Horizontalmente, ele é cortado pelo 6, então ele deve subir na vertical logo abaixo do 3.

5) Cantos no geral são extremamente limitados.

O 2 no canto superior direito deve ir na horizontal, logo ele é fácil de preencher.

# Capítulo 5 – Quebra-Cabeças de Substituição de Letras

## — Introdução —

Quando o seu filho estiver confortável com os quebra-cabeças “Números Faltantes” de algumas páginas atrás neste capítulo, ele pode começar a brincar com esses quebra-cabeças. Nestes, um ou mais dígitos são trocados por letras. As três regras para as letras são:

- Uma dada letra corresponde sempre ao mesmo dígito
- O primeiro dígito de um número não pode ser zero
- Letras diferentes devem ser números diferentes

Crie esses quebra-cabeças pegando problemas de adição ou subtração e substituindo um ou mais dígitos. Os quebra-cabeças também podem ser criados para serem desafios de resolução de problemas interessantes para o seu filho. Note que os valores das letras não passam de quebra-cabeça a quebra-cabeça.

## — Exemplos —

O primeiro exemplo demonstra como você pode pegar um problema normal de adição ou subtração e criar um quebra-cabeça de substituição de letras. A primeira versão trocou todos os 6 com A, e a segunda versão trocou os 2 com B.

$$\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array} \quad \dashrightarrow \quad \begin{array}{r} 23 \quad B3 \\ +4A \quad +4A \\ \hline A9 \quad A9 \end{array}$$

Estes outros exemplos foram construídos cuidadosamente para permitir solucioná-los usando as propriedades inerentes a situação específica. Uma propriedade a ser notada é que, ao se adicionar dois números, o que passa para a próxima coluna é sempre 0 ou 1. Então, por exemplo, no problema  $A + A = C4$ , C deve ser 1 pois não é permitido ser 0.

$$\begin{array}{r} B \quad B \quad A \quad A \quad D \quad A \\ +8 \quad +B \quad +A \quad +2 \quad +2 \quad +B \\ \hline C \quad 8 \quad C4 \quad BC \quad EE \quad AC \end{array}$$

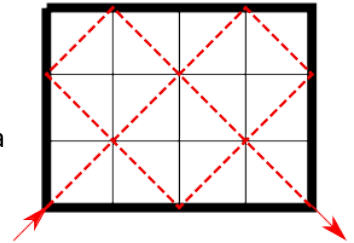
$$\begin{array}{r} A \quad C \quad A \quad A \\ A \quad C \quad A \quad A \quad A \quad B \\ +A \quad +C \quad +7 \quad +B \quad +BB \quad +AB \\ \hline B2 \quad D4 \quad B \quad B0 \quad A7 \quad BA \end{array}$$

$$\begin{array}{r} BA \quad AD \quad AA \quad AA \quad AA \quad AA \\ +BB \quad +BD \quad +BA \quad +CB \quad +AB \quad +AA \\ \hline CAB \quad BCC \quad BBC \quad BBC \quad CAC \quad BBC \end{array}$$

# Capítulo 5 – Brincando com Formas

## — Bola De Sinuca Saltadora – Introdução —

Imagine uma mesa de sinuca com bolsos em cada canto. Quando uma bola bate no canto da mesa, ela retorna no mesmo ângulo que bateu. Se lançarmos uma bola a um ângulo de 45 graus a partir do canto inferior esquerdo, onde ela vai terminar? A resposta depende do tamanho da mesa. Ilustrado à direita é o que acontece em uma mesa 3 por 4.



Dê para seu filho um desenho da mesa e desafie-o a prever qual canto será atingido primeiro e quantas vezes a bola irá quicar antes de chegar naquele canto.

## — Bola De Sinuca Saltadora – Análise —

Comece permitindo que seu filho simplesmente explore o material e não se apresse na descoberta dos resultados. Como você verá a seguir, esse problema envolve algumas ideias sofisticadas para uma pessoa jovem. Quando necessário, faça uma pergunta ou outra para dar alguma estrutura ao seu raciocínio. Você já sabe como funciona – observe primeiro as mesas simples procurando os padrões - quando essa ideia ficar automática para o seu filho, será útil para a vida inteira dele no futuro!

As mesas mais simples são 1 por  $n$ , e elas são fáceis de entender. Brincando com alguns valores de  $n$ , o padrão aparece rapidamente. É fácil de subestimar um resultado simples como esse; contudo, qualquer resultado bem entendido precisa ser celebrado, e esse resultado vai levar a outros.

**Resultado:** Mesa 1 por  $n$ : A bola irá levar  $n-1$  saltos. A bola irá acabar no canto inferior direito se  $n$  for par e no canto superior direito se  $n$  for ímpar.

As próximas mesas mais simples são 2 por  $n$ . Os padrões aqui são um pouco mais elaborados. Um bom registro de dados pode gerar uma diferença significativa em algo como isto. Um observador atento irá notar que uma mesa 2 por 4 se comporta da mesma forma que uma mesa 1 por 2, e uma mesa 2 por 6 igual a uma 1 por 3. Isso rapidamente leva ao próximo resultado.

**Resultado:** Uma mesa 2 por  $2xn$  se comporta igual a uma mesa 1 por  $n$ .

Por que isto? O que está acontecendo? Este é um processo matemático para transmitir a seu filho – procure por padrões e então procure entendê-los, e com esse novo entendimento amplie seus resultados anteriores.

O que está acontecendo é que os saltos na mesa não mudam se você aumentar ambas as dimensões proporcionalmente. Ao fim disso, a mesa é maior mas a geometria é a mesma. Em termos geométricos, as duas mesas são consideradas “semelhantes”.

**Resultado:** Uma mesa  $kxm$  por  $kxn$  se comporta igual a uma mesa  $m$  por  $n$ .

Nós chegamos aqui em passos pequenos, mas esse é um GRANDE resultado. Isso significa que podemos começar nossas análises em qualquer mesa removendo primeiro qualquer fator comum.

Resumindo de onde saímos das mesas 2 por n. Nós entendemos o que acontece quando n é par, mas o que acontece quando n é ímpar? O que acontece em 2 por n para n = 1, 3, 5, 7, em diante? O padrão rapidamente se torna fácil de ver.

Resultado: Quando n é ímpar, uma mesa 2 por n tem n saltos e acaba no canto superior esquerdo.

Muito progresso está sendo feito. Testando mais exemplos leva a mais alguns padrões.

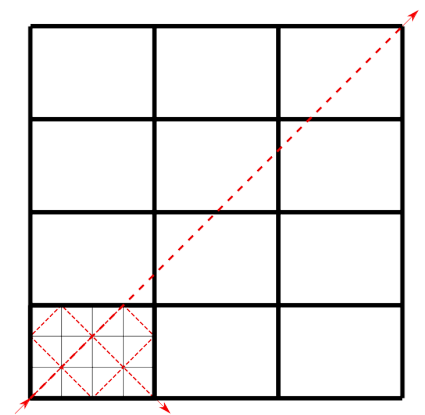
Resultado: Se n não é um múltiplo de 3, uma mesa 3 por n tem n+1 saltos e acaba no canto superior direito se n tem resto de 1 quando dividido por 3, e no canto inferior direito se n tem um resto de 2 quando dividido por 3. Se n é ímpar, uma mesa 4 por n tem n + 2 saltos e acaba no no canto superior esquerdo. Se n não é um múltiplo de 5, uma mesa 5 por n tem n+3 saltos e acaba no canto superior direito quando n é ímpar e no canto inferior direito quando n é par.

Nesse ponto, nós estamos tentados a olhar além dos dados, ver alguns padrões, e fazer algumas conjecturas.

Conjectura: Assuma que k e n não têm fatores em comum. Então uma mesa k por n terá k + n - 2 saltos. Isso vai acabar no canto superior esquerdo se k for par. A bola irá acabar no canto superior direito se k for ímpar e n ímpar, e no canto inferior direito se k for ímpar e n for par.

Uau - se essa conjectura for verdade, nós resolvemos esse problema por inteiro! Você já sabe o que vem... Vamos ver se nós podemos explicar porque essa conjectura deve ser verdade (ou descobrir se é falsa).

Apesar de terem outras formas de entender essa situação, como às vezes acontece, o que torna esse problema mais fácil de entender é uma ideia nova. Pode não lhe ocorrer, mas uma vez que perceber você provavelmente ficará maravilhado. A ideia é desdobrar a mesa para que a bola possa ir em uma linha reta! Isso é o que acontece se nós desdobrarmos a mesa 3 por 4 original e criarmos um caminho para a bola em uma linha reta.



Constatar que a conjectura é verdadeira é muito mais fácil agora. Os pulos correspondem a linhas que cruzam - há (k - 1) deles para cruzar em uma direção e (n - 1) deles para cruzar na outra direção, então juntos resultam em um total de  $(k - 1) + (n - 1) = k + n - 2$  linhas para cruzar. Ver em qual canto a bola termina acaba virando uma questão de manter o registro de como as coisas desdobram. Nós terminamos agora com uma jornada bem interessante.

## — Preenchendo Regiões Com Formas – Introdução —

Suponha que você tem um tabuleiro de 8 por 8 e você tem algumas peças de 1 por 2. Encontrar uma forma de cobrir o tabuleiro de xadrez com 32 dessas peças 1 por 2 é simples.

Vamos começar removendo alguns quadrados do tabuleiro de xadrez e ver o que acontece. Se você remover um canto do tabuleiro, você percebe imediatamente que não consegue mais cobrir o tabuleiro com as peças pois elas sempre irão cobrir um número par de espaços, e agora há 63 espaços para cobrir. Okay, remova dois cantos para criar um número par de espaços - você consegue cobrir agora? A resposta depende de quais cantos você remove. Por que? E se você não se restringir a remover apenas os cantos, o que acontecerá?

## — Preenchendo Regiões Com Formas – Análise —

Deixe o seu filho brincar com isso antes de revelar a ideia de colorir. Se ele costuma brincar com tabuleiros pequenos, ele pode acabar descobrindo essa regra por conta própria, e isso é sempre melhor.

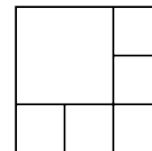
Uma observação que ajuda bastante com essa questão é utilizar as cores dos quadrados do tabuleiro de xadrez. Se você pegar as peças de 1 por 2 e colorir um quadrado com branco e o outro preto, você verá algo interessante acontecer. Cada peça deve cobrir um quadrado de cada cor. Não só  $k$  peças cobrem  $2k$  espaços, mas elas irão cobrir  $k$  espaços brancos e  $k$  espaços pretos - o mesmo número de espaços para cada cor. Usando essa ideia, fica óbvio que se você remover mais quadrados de uma cor do que da outra, fica impossível de cobrir o tabuleiro.

Se o seu filho estiver gostando dessas perguntas, comece a diversificar usando outras formas para cobrir o tabuleiro. Explore o preenchimento dele com peças de 1 por 3 ou com 3 quadrados em formato de L. Que padrões e regras você descobriu com isso? Quais outras formas podem ser interessantes para tentar?

## — Preenchendo Quadrados Com Quadrados – Introdução —

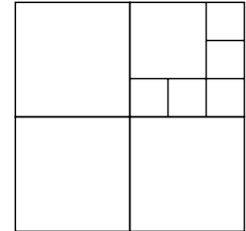
De quais formas você consegue preencher um quadrado com outros quadrados, onde os outros quadrados não precisam ser todos do mesmo tamanho? Contudo, as larguras não podem ser números totalmente aleatórios – a largura lateral de cada quadrado deve ser um número inteiro múltiplo de uma largura fixa. A questão para investigar é: Quais são todos os números de quadrados que são possíveis? Além disso, se você sabe um número que é possível, há uma forma fácil de descrever como fazer isso?

Deixe o seu filho brincar com isso por alguns dias e não tenha pressa para chegar à resposta. Há várias formas diferentes para pensar em ideias para essa investigação, então seja flexível e trabalhe com as ideias do seu filho. Aqui está um diagrama mostrando como 6 é possível.



Pensar em alguns exemplos rápidos é sempre uma boa ideia. Quebrando um quadrado grande em vários quadrados menores de tamanhos iguais é um começo fácil. A partir disso, você percebe que todos os quadrados dos números (1, 4, 9, 16, 25, ...) funcionam.

Pegando o quadrado de 6 como exemplo, nós podemos usar um quadrado grande de qualquer tamanho e colocar quadrados de 1 por 1 em dois lados dele. Fazendo isso com quadrados ainda maiores (1 por 1, 2 por 2, 3 por 3, ...) nós temos  $1 + 3 = 4$ ,  $1 + 5 = 6$  (como o exemplo),  $1 + 7 = 8$ ,  $1 + 9 = 10$ , e assim em diante. Assim, todos os números pares que começam com 4 podem ser feitos dessa forma.



Uma ideia poderosa que explica isso rapidamente é ver que podemos pegar um diagrama que funciona, e substituir um de seus quadrados por outro diagrama que funciona. Então por exemplo, se você pegar um quadrado simples de 2 por 2 preenchido com 4 quadrados de 1 por 1, e você substituir por um desses quadrados de 1 por 1 com o exemplo de 6 quadrados, você consegue o diagrama de 9 quadrados na imagem à direita.

Como um quadrado está sendo substituído por um diagrama de  $n$  quadrados, a mudança no número total de quadrados é dada ao somar  $n-1$  dos quadrados. Isso significa que podemos pegar um número que funciona, e adicionar os múltiplos menos um a qualquer outro número que funcione. Especificamente, podemos acrescentar múltiplos de  $4 - 1 = 3$  a qualquer outro número que funcione - os mais fáceis de adicionar 3 são todos os números pares começando com o 4.

Tudo isso junto diz que os números 1, 4, 6, 7, 8, 9, ... todos funcionam, e é fácil de ver pelo menos uma forma simples de construir eles. Também é fácil de se convencer que 2, 3, e 5 são impossíveis.

Se o seu filho gostou de explorar essas questões, explore variações desse tema. Vamos supor que você apenas permita quadrados de tamanhos específicos - como 1 por 1, 2 por 2, e 3 por 3. Ou talvez permita apenas 2 por 2 e 3 por 3. Veja quais perguntas levam a resultados interessantes e quais nem tanto.

Outra direção a ser explorada é a de preencher outras figuras com figuras que possuam a mesma forma. Por exemplo, levante a mesma questão para triângulos regulares (triângulos com todos os lados de mesmo comprimento). Algumas figuras são interessantes de investigar dessa forma, e outras não são interessantes de modo algum — quais são elas?

# Capítulo 5 – Jogo do Produto

## — Introdução —

Use uma folha de papel compartilhada preenchida da seguinte forma:

O primeiro jogador move uma ficha em qualquer número de 1 a 9 nos quadrados de 1-9 na fileira de baixo. O segundo jogador coloca outra ficha em um dos quadrados de 1-9 na fileira de baixo e reivindica o produto na tabela de 6 por 6. A partir de então, cada jogador escolhe mover uma das duas fichas e reivindicar o produto (se puder). O primeiro jogador a reivindicar 3 quadrados em sequência ganha. Misture os números dos produtos na tabela de 6 por 6 para proporcionar ao seu filho uma prática melhor na identificação dos produtos.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Estes tabuleiros de jogo podem ser feitos tão grandes quanto você desejar, embora eles se tornem bastante grandes muito rapidamente. Apresentamos aqui alguns tabuleiros maiores com os intervalos de números correspondentes abaixo deles.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	60	63	64	
70	72	80	81	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

★	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	14
15	16	18	20	★	21	22
24	25	27	28	30	32	33
35	36	40	42	44	45	48
49	★	50	54	55	56	60
63	64	66	70	72	77	80
81	88	90	99	100	110	121

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----

★	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	★	12	14	15
16	18	20	21	22	24	25	27
★	28	30	32	33	35	36	40
42	44	45	48	★	49	50	54
55	56	60	63	64	66	70	72
★	77	80	81	84	88	90	96
99	100	108	110	120	121	132	144

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

Os quadrados com as estrelas vermelhas são quadrados “livres” e podem ser usados por ambos os lados conforme for necessário.

# Capítulo 5 – Calculadoras Limitadas

## — Introdução —

Suponha que você tenha uma calculadora que esteja severamente danificada e seja desafiado a produzir algum resultado nessa calculadora. Você pode pensar em uma grande variedade de cenários que podem fornecer desafios interessantes com uma descrição rápida do quebra-cabeça. Essa atividade é fácil de brincar verbalmente toda vez que tiver tempo livre. Aqui estão alguns exemplos para você começar.

Apesar de terem alguns momentos onde há uma matemática mais complexa nesses exercícios, a maioria desses problemas são feitos para se divertir com eles.

1a) Suponha que você tenha uma calculadora com +, -, x, e /, mas apenas um número funcionando, o 4. Você consegue chegar a 21? Se sim, qual é o menor número de passos que você precisaria?

$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4/4 = 21$  é uma forma, mas há muitas outras maneiras para fazer isso. Outra é  $4 \times (4 + 4/4) + 4/4$ . O objetivo é explorar e aproveitar a diversão da descoberta.

1b) Suponha que você possa usar o 4 no máximo quatro vezes - quais números você consegue produzir? Suponha que você precise usar o 4 exatamente quatro vezes.

Conforme os recursos matemáticos da criança aumentam, o problema dos 4 quatros é um quebra-cabeça divertido. Neste ponto, as escolhas do seu filho são bastante limitadas, mas ainda é muito divertido brincar com isso. Será particularmente difícil fazer muitos números sem dividir ou utilizar decimais. Não se preocupe em pensar em todos os números em ordem - apenas pense na maior quantidade de números diferentes possíveis.

Aqui estão alguns exemplos para você começar.

$$1 = (4/4) \times (4/4) = 44 / 44$$

$$2 = 4 / ((4 + 4) / 4)$$

$$3 = (4 + 4 + 4) / 4$$

$$4 = (4 - 4) \times 4 + 4$$

$$6 = 4 + (4 + 4) / 4$$

$$7 = 44 / 4 - 4$$

$$8 = (4 + 4) \times (4/4) = 4 + 4 + 4 - 4$$

$$32 = 4 \times 4 + 4 \times 4$$

1c) Brinque utilizando outros números de um dígito e criando outros resultados.

2a) Suponha que a sua calculadora apenas possa somar 4 ou 7. Quais números você consegue produzir?

Esse é o resultado que nós temos visto várias vezes até agora. Começando com  $(4 - 1) \times (7 - 1)$ , você consegue alcançar todos os números ao somar os múltiplos de 4 e 7.  $18 = 2 \times 7 + 4$ ,  $19 = 3 \times 4 + 7$ ,  $20 = 5 \times 4$ ,  $21 = 3 \times 7$ , e assim por diante.

2b) Suponha que havia 4 ou 7, mas pode somar ou subtrair. Quais números você consegue produzir?

Você consegue produzir todos os números dessa forma.

2c) Substitua o 4 e o 7 por outros pares de números. O que acontece com esses pares?

Na Teoria dos Números, isso é chamado teorema de Bezout. O resultado diz que combinando múltiplos de dois números você consegue produzir qualquer múltiplo do maior divisor comum dos dois números.

3) Suponha que você tem apenas uma tecla 1 e possa apenas somar ou dobrar. Por exemplo,  $2 \times (2 \times 1) + 1$  é 5. Quais outros números você consegue criar?

Essa é uma pergunta sobre números binários camuflada. Não é importante para o seu filho perceber isso ou entender, isso é apenas para se divertir. Qualquer número pode ser escrito em binário, então todos os números podem ser alcançados combinando a duplicação com a adição de 1. Por exemplo,  $21$  é  $16 + 4 + 1$ . Então,  $21 = 2 \times (2 \times (2 \times (2 \times 1) + 0) + 1) + 0) + 1$ .

# Capítulo 5 – Dobro ou Nada

## — Introdução —

Os jogadores começam o jogo escolhendo em segredo 5 números diferentes, maiores que 20 e menores que 120. Depois que forem escolhidos, eles são escritos onde todos podem ver. Usando Cartas Numéricas ou algum outro dispositivo, um número aleatório de 1 a 20 é criado. Esse número é dobrado várias vezes até acertar o número de um jogador pela primeira vez ou passar de 120. O primeiro jogador a ter todos os números acertados é o vencedor.

## — Análise —

A pergunta é: Quais são os melhores cinco números para escolher? Aqui estão algumas ideias para pensar sobre.

Regra: Sempre pegue um número que é a potência de 2 vezes um número de 1 a 20.

Se você escolher um número como 23 ou 46, eles nunca serão atingidos e você sempre irá perder.

Regra: Nunca pegue um número que é o dobro de outro número que você poderia ter escolhido.

Se você escolher 44, por que não escolher o 22? Se outra pessoa escolher o 22, você irá perder uma rodada.

Análise adicional: Os números de 1 a 20 possuem as mesmas chances de serem escolhidos. Contudo, como o 9 leva ao 18, 18 é duas vezes mais provável de ser escolhido do que, por exemplo, o 11. Se você combinar as formas de conseguir começos diferentes, os pontos iniciais possuem as seguintes probabilidades:

11 - 1/20 (de 11)

12 - 3/20 (de 3, 6, e 12)

13 - 1/20 (de 13)

14 - 2/20 (de 7 e 14)

15 - 1/20 (de 15)

16 - 5/20 (de 1, 2, 4, 8, e 16)

17 - 1/20 (de 17)

18 - 2/20 (de 9 e 18)

19 - 1/20 (de 19)

20 - 3/20 (de 5, 10, e 20)

Claramente os melhores números para usar são os múltiplos de 16, 12, e 20. Uma estratégia simples é usar os cinco números: 32, 64, 24, 48, e 40. Esses números nem sempre ganham, mas eles serão muito bons para você ao longo do tempo.